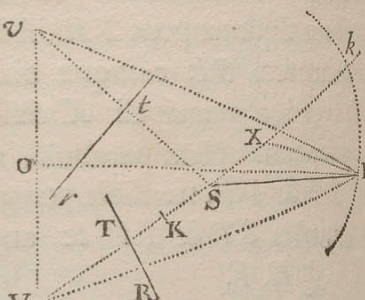
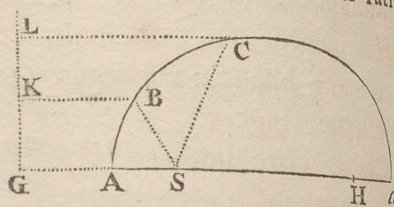


PROPOSITIO XX. PROBLEMA XII.

Circa datum umbilicum trajectoriam quamvis specie datam describere, quæ per data puncta transibit & rectas tangens positione datas.

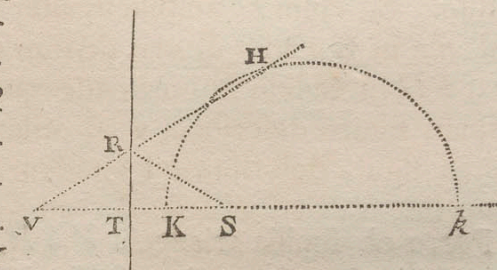
Cas. 1. Dato umbilico S , describenda sit trajectoria ABC per puncta duo B, C . Quoniam trajectoria datur specie, dabitur ratio axis principalis ad distantiam umbilicorum. In ea ratione cape KB ad BS , & LC ad CS . Centris B, C , intervallis BK, CL , describe circulos duos, & ad rectam KL , quæ tangat eosdem in K & L , demitte perpendicularum SG , idemque secam in A & a , ita ut sit GA ad AS & Ga ad aS ut est KB ad BS & axe Aa , verticibus A, a , describatur trajectoria. Dico factum. Sit enim H umbilicus alter figuræ descriptæ, & cum sit GA ad AS ut Ga ad aS , erit divisim $Ga - GA$ seu Aa ad $aS - AS$ seu SH in eadem ratione, ideoque in ratione quam habet axis principalis figuræ describendæ ad distantiam umbilicorum ejus; & propterea figura descripta est ejusdem speciei cum describenda. Cumque sint KB ad BS & LC ad CS in eadem ratione, transibit hæc figura per puncta B, C , ut ex conicis manifestum est.

Cas. 2. Dato umbilico S , describenda sit trajectoria quæ rectas duas TR, tr alicubi contingat. Ab umbilico in tangentes demitte perpendiculara ST, st & produc eadem ad V, v , ut sint TV, tv æquales TS, ts . Biseca Vv in O , & erige perpendicularum infinitum OH , rectamque VS infinite productam secam in K & k , ita ut sit VK ad KS & Vk ad kS ut est trajectoriæ describendæ axis principalis ad umbilicorum distantiam. Super diametro Kk describatur circulus secans OH in H ; & umbilicis S, H , axe principali ipsam VH æquante, describatur trajectoria. Dico factum. Nam biseca Kk in X , & jungit



junge HX, HS, HV, Hv . Quoniam est VK ad KS ut Vk ad kS ; & composite ut $VK + Vk$ ad $KS + kS$; divisimque ut $Vk - VK$ ad $kS - KS$, id est, ut $2VX$ ad $2KX$ & $2KX$ ad $2SX$, ideoque ut VX ad HX & HX ad SX , similia erunt triangula VXH, HXS , & propterea VH erit ad SH ut VX ad XH , ideoque ut VK ad KS . Habet igitur trajectoriæ descriptæ axis principalis VH eam rationem ad ipsius umbilicorum distantiam SH , quam habet trajectoriæ describendæ axis principalis ad ipsius umbilicorum distantiam, & propterea ejusdem est speciei. Insuper cum VH, vH æquantur axi principali, & VS, vS a rectis TR, tr perpendiculariter bisecentur, liquet (ex lem. xv.) rectas illas trajectoriam descriptam tangere. *Q. E. F.*

Cas. 3. Dato umbilico S describenda sit trajectoria quæ rectam TR tangat in puncto dato R . In rectam TR demitte perpendicularam ST , & produc eandem ad V , ut sit TV æqualis ST . Junge VR & rectam VS infinite productam secam in K & k , ita ut sit VK ad SK & Vk ad sk ut ellipseos describendæ axis principalis ad distantiam umbilicorum; circuloque super diametro Kk descripto secetur producta recta VR in H , & umbilicis S, H , axe principali rectam VH æquante, describatur trajectoria. Dico factum. Namque VH esse ad SH ut VK ad SK , atque ideo ut axis principalis trajectoriæ describendæ ad distantiam umbilicorum ejus, patet ex demonstratis in casu secundo, & propterea trajectoriam descriptam ejusdem esse speciei cum describenda, rectam vero TR qua angulus $VR S$ bisecatur, tangere trajectoriam in puncto R , patet ex conicis. *Q. E. F.*



Cas. 4. Circa umbilicum S describenda jam sit trajectoria APB , quæ tangat rectam TR , transeatque per punctum quodvis P extra tangentem datum, quæque similis sit figuræ apb , axe principali ab & umbilicis s, b descriptæ. In tangentem TR demitte perpendicularum ST , & produc idem ad V , ut sit TV æqualis ST . Angulis autem VSP, SVP fac angulos bsq, sbq æquales; centroque q & intervallo quod sit ad ab ut SP ad VS describe circulum secantem figuram apb in p . Junge sp & age SH quæ sit ad sb ut est SP ad